

# Turbulenzen und Finanzmarkt

Von Joachim Peinke, Malte Siefert, Frank Böttcher und Rudolf Friedrich

Ähnlichkeiten zwischen der Unordnung in turbulenten Strömungen und im Finanzmarktgeschehen werden auf der Basis von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen vorgestellt. Insbesondere wird auf anomale Wahrscheinlichkeiten eingegangen, die eine fundamentale wissenschaftliche Herausforderung darstellen. So beschreiben diese anomalen Wahrscheinlichkeiten unerwartet häufiges Auftreten von Extremeregebnissen, wie etwa Windböen in einer turbulenten Windströmung oder Börsencrashes am Finanzmarkt. Zur Beschreibung dieser Wahrscheinlichkeiten wird über einen neuen Zugang mittels stochastischer Kaskadenprozesse berichtet.

Similarities between disorder in turbulent flows and in the financial market are presented on the basis of probabilistic considerations. In particular, we focus on anomalous probabilities, whose understanding is a real scientific challenge. These anomalous probabilities describe unexpectedly frequent occurrences of extreme events, like gusts in a turbulent wind flow or like crashes in the financial markets. We report on a new approach to characterize these probabilities using stochastic cascade processes.



Die Frankfurter Börse. Turbulenzen am Finanzmarkt lassen sich offenbar mit physikalischen Gesetzmäßigkeiten beschreiben.

**H**inter dem geläufigen Ausdruck „Turbulenzen an der Börse“ steht eine ungeahnte Ähnlichkeit zwischen dem Auf und Ab des Finanzmarktgeschehens und der Unordnung in einer turbulenten Strömung. Die Forschung der letzten Jahre konnte zeigen, dass die Komplexität beider Systeme auf kaskadenartigen Prozessen beruht. Die Kaskadenprozesse, die die Energie in der Turbulenz von großen auf kleine Wirbel übertragen, scheinen auch für die typischen Phänomene der Kurzzeitschwankungen am Finanzmarkt grundlegende Bedeutung zu haben. Ein zentrales Problem in der statistischen Beschreibung beider Systeme ist das Auftreten anomaler Statistiken. Diese anomalen Statistiken umfassen für die Strömungsturbulenz die unerwartet große Häufigkeit von kleinen sehr energiereichen Wirbeln und für die Finanzmärkte die unerwartet große

Häufigkeit von extremen Kursschwankungen. Das tiefere Verständnis dieser Statistiken ist zum Beispiel für die Risikomodellierung von Windböen oder von Börsencrashes bzw. Börsenhäussen wichtig.

## Turbulenz - ein ungelöstes Problem

**I**n den Naturwissenschaften gilt die Turbulenz, wie sie sich bei der Strömung von Gasen und Flüssigkeiten ergibt, als ein großes ungelöstes Problem. Im Gegensatz zu vielen anderen wissenschaftlichen Herausforderungen begegnen uns die Phänomene der Turbulenz alltäglich, so zum Beispiel beim Kochen von Wasser oder beim Wetter. Das wissenschaftliche Problem im Verständnis der Turbulenz lässt sich wie folgt beschreiben: Zum einen kennen wir seit mehr als 150 Jahren die Grundgleichungen (die so genannten

Navier Stokes Gleichungen) der Turbulenz. Sie stellen im Wesentlichen nichts anderes als eine Umformulierung der Newtonschen Gesetze dar, die ja bekanntlich auch den Fall des Apfels vom Baum beschreiben. Zum anderen wissen wir aber nicht, ob es überhaupt allgemeine Lösungen dieser Gleichungen gibt. Dieses Problem gilt als eines von sieben Jahrtausendproblemen der Mathematik, für deren Lösung eine Millionen Dollar als Preisgeld bereitgestellt ist. Viele Wissenschaftler haben sich in den letzten 100 Jahren diesem Problem gewidmet, ohne eine endgültige Lösung zu finden. Hierbei soll aber hervorgehoben werden, dass die Turbulenzforschung trotzdem große wissenschaftliche Erfolge geliefert hat. So ist das ganze Gebiet der Nichtlinearen Systeme wesentlich durch die Turbulenzforschung geprägt worden und hat zu Erkenntnissen über das Chaos und über fraktale Strukturen geführt, die unser heutiges Naturverständnis grundlegend verändert haben und etliche fruchtbare Anwendungen unter anderem in den Ingenieurwissenschaften und in der Biologie finden.

In der gemeinsamen Forschung der Oldenburger Arbeitsgruppe Hydrodynamik des Instituts für Physik und des Instituts für Theoretische Physik der Universität Münster steht die Turbulenzforschung im Zentrum. Statt mit analytischen oder numerischen Methoden den Turbulenzgleichungen näher zu kommen, wurden hier Experimente durchgeführt und analysiert. Im Experiment lässt sich die Turbulenz so beobachten, wie sie in der Natur vorkommt. Dies gilt unabhängig davon, ob sich eine Gleichung lösen lässt oder nicht. Aus Beobachtungen und Messungen der Turbulenz wird versucht, ein tieferes Verständnis zu entwickeln. Betrachtet man hierbei einen turbulenten Fluss, wie er sich etwa bei einer Strömung aus einer Düse ergibt (siehe Abbildung 1), so erkennt man leicht die komplexe Unordnung, die hier auftritt. Es stellt sich die Frage, was man über diese Turbulenz wissen will. Der Idealfall, dass man die Bewegung jeder Einzelheit in der Strömung wissen und verstehen will, stellt sich nach kurzer Überlegung als illusorisch heraus. Um etwa 1 Meter der Strömung aus Abbildung 1 zu erfassen, müsste man die lokale Geschwindigkeit in alle drei Raumrichtungen an  $10^{10}$  Stellen, dies sind 10.000.000.000 oder 10 Milliarden Stellen, erfassen und hätte damit die Strömung nur zu einem einzigen Zeitpunkt erfasst. Auch wenn es mit modernen Computern prinzipiell möglich sein sollte, so viele Daten zu speichern, stellt sich die Frage, was hieraus an Erkenntnis gewonnen werden kann.

Es ist offensichtlich, dass man andere beschreibende Größen für die Turbulenz braucht. Hierfür bietet sich eine statistische Beschreibung an. Es muss also untersucht werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit an verschiedenen Orten welche Strömungsgeschwindigkeit herrscht. Bei dieser Herangehensweise sind die Geschwindigkeitsunterschiede auf vorgegebenen Abständen von besonderem Interesse. (Für einen zeitlichen Abstand  $\tau$  bestimmt man die Geschwindigkeitsunterschiede als  $\delta u_\tau = u(x+\tau) - u(x)$ .) Auf die Beschreibung dieser Größen hat sich in den letzten Jahrzehnten die Forschung konzentriert. Es ist leicht einzusehen, dass diese Geschwindigkeitsfluktuationen, die mathematisch betrachtet Korrelationen entsprechen, auch von praktischem Interesse sind. So sind die turbulenten Rüttelkräfte, die auf ein Flugzeug oder eine Windkraftanlage wirken, gerade durch die räumlich unterschiedlichen Geschwindigkeiten gegeben. Aber auch Windböen sind nichts anderes als die Änderung der Windgeschwindigkeit auf kleinen Zeitabständen.

Betrachtet man ein Windfeld mit einer Böe als eine räumliche Struktur, die sich mit der Hauptwindgeschwindigkeit bewegt, so entsprechen die Windböen ebenfalls großen Geschwindigkeitsänderungen auf kleinen Abständen. Es ergeben sich also keine fundamental anderen Aspekte, wenn man anstelle von räumlichen Abständen Zeitabstände betrachtet, um Fluktuationen zu bestimmen.

### Anomale Statistiken

Im Folgenden soll auf „das ungelöste Problem der Turbulenz“ in Bezug auf seine statistische Beschreibung eingegangen werden. Das wesentliche Problem besteht darin, dass die Statistiken, die man erhält, sich nicht durch einfache Zufallsvorgänge erklären lassen. Nehmen wir zum Beispiel eine Windmessung aus dem Oktober 1997 an der Nordseeküste. Aus dieser Messung bestimmen wir nun, wie häufig unterschiedliche Windgeschwindigkeitsänderungen für fest vorgegebene Zeitabstände auftreten. Ändert sich zum Beispiel die Windgeschwindigkeit in wenigen Sekunden um mehr als 10 m/sec (36 km/h), so kann man dies als eine Windböe betrachten, womit klar wird, dass diese Statistik auch das Auftreten von Windböen erfasst. Abbildung 2 gibt eine solche Statis-

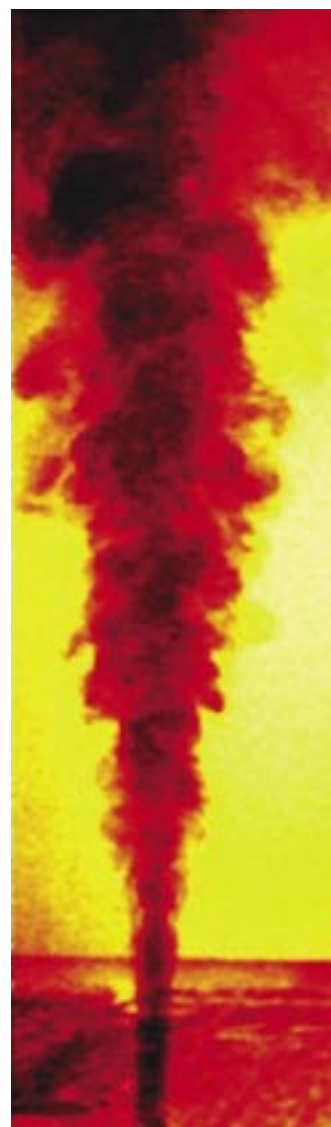


Abbildung 1: Abbildung einer mit Tinte eingefärbten turbulenten Wasserströmung. Die Strömung tritt am unteren Bildrand aus einer Düse aus und fließt von unten nach oben. Die Strömungsgeschwindigkeit beträgt einige cm/sec.

tik bzw. Häufigkeitsverteilung wieder. Es handelt sich um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die mit einer normalen Statistik verglichen werden kann (rote Kurve). Diese normale Statistik, auch Normal- oder Gaußverteilung genannt, versteht man seit langem sehr gut. Sie ergibt sich zum Beispiel beim Würfeln, wenn man fragt, wie wahrscheinlich eine bestimmte mittlere Augenzahl bei sehr häufigem Würfeln wird. Aus Abbildung 2 erkennt man nun, dass der Wert von  $\delta u_\tau = 0$ , das heißt keine Geschwindigkeitsänderung, am häufigsten auftritt. Spannender wird es, wenn wir nun die Extremereignisse in der Verteilung betrachten, die für große Werte von  $\delta u_\tau$  zu finden sind. Hierzu werden wir auf zwei Aspekte eingehen:

1. Für diese großen  $\delta u_\tau$ -Werte ergeben sich die Auftretswahrscheinlichkeiten von

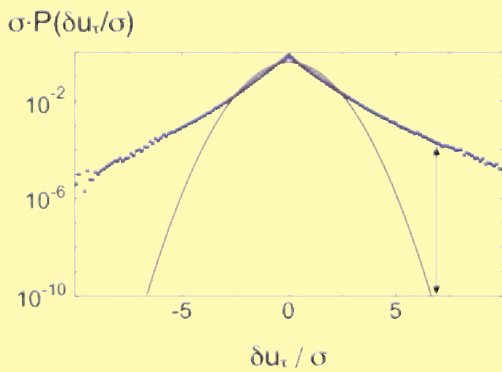


Abbildung 2: Blaue Punkte geben die gemessene Häufigkeitsverteilung der Windgeschwindigkeitsänderungen innerhalb von 4 sec wieder. Hierzu wurden Messdaten an einem küstennahen Standort im Oktober 1997 über 275 Stunden lang ausgewertet. Die rote Kurve entspricht einer Gaußverteilung, die den gleichen Mittelwert und die gleiche Varianz ( $\sigma^2$ ) wie die Messdaten hat. In x-Achsenrichtung sind die Werte der Windgeschwindigkeitsänderung ( $\delta u_t$ ) dargestellt (5 entspricht einer Geschwindigkeitsänderung von 4 m/sec); in y-Achsenrichtung ist in logarithmischer Weise die Wahrscheinlichkeit aufgetragen. Für den Wert von ( $\delta u_t = 7\sigma = 5.6\text{ m/sec}$ ) ist mit einem Doppelpfeil der Unterschied zwischen beiden Verteilungen markiert, der hier einem Faktor von  $10^6$  entspricht.  
Bildquelle: F. Böttcher, Ch. Renner, H.-P. Waldl, J. Peinke, *Boundary Layer Meteorology* **108**, 163 (2003).

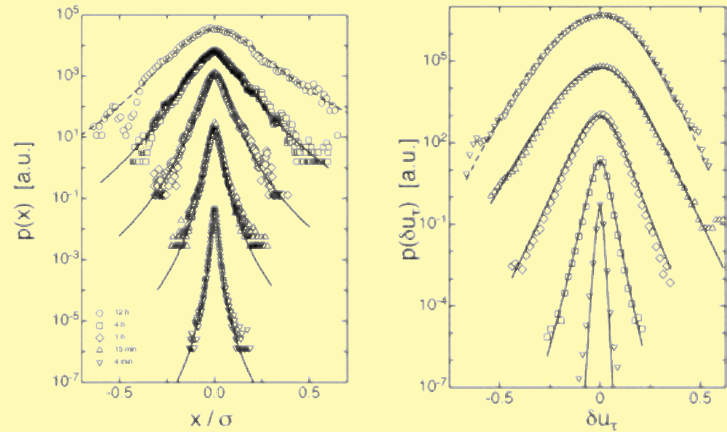


Abbildung 3: Schwankungen des Dollar/DM Wechselkurses  $x$  (linkes Teilbild) im Vergleich mit Geschwindigkeitsschwankungen (rechtes Teilbild), wie sie sich aus einer turbulenten Strömung ergeben. Es sind jeweils unterschiedliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen dargestellt, die für unterschiedliche Zeitabstände (Finanzdaten) und unterschiedliche räumliche Abstände (Turbulenzdaten) erhalten wurden. Für die Finanzdaten wurden die zeitlichen Abstände zwischen 4 min und 24 Stunden geändert, für die Turbulenzdaten wurden die Abstände zwischen 22 mm und 0,25 mm geändert. Alle Verteilungen sind wegen der besseren Darstellung in y-Richtung frei verschoben, so dass die y-Achsen keine normierten Größen darstellen. Die Finanzstatistiken wurden aus 1.5 Millionen Kursnotierungen im Zeitraum von Oktober 1992 bis September 1993 ermittelt. Für die Turbulenzstatistiken wurden 100 Millionen Geschwindigkeitswerte im Oldenburger Windkanal gemessen. Man beachte die Formänderungen der Verteilungen. Während auf großen Skalen (obere Kurven) die Verteilungen gaußartig sind, werden die Verteilungen für kleine Abstände (untere Kurven) immer intermittenter. Die durchgezogenen Kurven stellen die Ergebnisse aus den von uns rekonstruierten Kaskadenprozessen dar.  
Bildquelle: Ch. Renner, J. Peinke, R. Friedrich, *Physica A* **298**, 499 (2001).

extrem großen Geschwindigkeitsänderungen, also Böen. Aus den Messergebnissen lässt sich leicht erkennen, dass das Auftreten der extremen Geschwindigkeitsänderungen viel wahrscheinlicher ist, als dies durch eine Gaußverteilung gegeben wäre. Betrachtet man zum Beispiel die Häufigkeit des Auftretens einer Geschwindigkeitsänderung von 5.6 m/sec in 4 sec, so sind die Messungen  $10^6$  mal wahrscheinlicher als in der entsprechenden Gaußverteilung. Bezüglich einer normalen Statistik, d.h. Gaußverteilung, würde man also eine Windböe dieser Stärke nur jedes zweite Jahr erwarten, aber man beobachtet sie alle paar Minuten. Diese totale Unterschätzung der Böenhäufigkeit durch die Gaußverteilung wird um so stärker, je größer das Ereignis ist. Solche Verteilungen sind typisch für die Turbulenz und werden als Intermittenzproblem der Turbulenz bezeichnet. Die ganze Energie der Turbulenz scheint sich auf kleinen Skalen in wenigen aber sehr starken kleinen Wirbeln oder Böen zu sammeln, die dann unerwartet häufig auftreten.

2. Eine weitere viel diskutierte Eigenschaft

der intermittenten Statistiken ergibt sich aus dem Verlauf der Statistiken für große Werte, also dem Verlauf der Flügel der Verteilungen. Zurzeit wird in internationalen Forscherkreisen die Frage diskutiert, ob diese Flügel einem Potenzgesetz (d.h.  $(\delta u_t)^\alpha$ ) folgen oder nicht. Statistiken mit Potenzgesetzen werden für recht viele Systeme vermutet, so für Naturkatastrophen wie Erdbeben, für die Verteilung des Reichtums, für Finanzdaten, für Strukturen der Neuronen im Gehirn, um nur ein paar Beispiele zu nennen. Der Leser mag sich nun fragen, was neben einem akademischen Interesse das Bedeutende an dieser Frage ist, ob die Flügel einer solchen Verteilung einem Potenzgesetz folgen oder nicht. Die große Problematik hinter dieser Frage ist, dass, falls es Potenzgesetze wären, einige Momente dieser Statistik nicht bestimmbar sind. Zum Beispiel kann aus solch einer Statistik heraus alle 10 Jahre ein großes Ereignis, etwa eine sehr große Windböe, erwartet werden, zugleich kann jedoch die Unsicherheit dieses Erwartungswertes unendlich groß sein, womit sich der erste Teil der Aussage als nutzlos

erweist. (In diesem Falle hätte die Verteilung einen Mittelwert, aber ein divergierendes zweites Moment.)

## Kursschwankungen am Devisenmarkt

Seit den siebziger Jahren werden die Wechselkurse vermehrt freigegeben. Sie werden vom Markt bestimmt und ändern sich somit fortwährend. Gleichzeitig sind die Devisenmärkte zu einem globalen Markt zusammengewachsen, dessen Teilnehmer über ein weltweites Datennetz miteinander verbunden sind. Neue Kursnotierungen treffen im Sekundenrhythmus ein und stehen nahezu augenblicklich den Teilnehmern zur Verfügung. Gehandelt wird per Telefon oder per Computer, und so vergeht oft nur sehr kurze Zeit vom Entschluss eines Händlers bis zur Ausführung einer Transaktion. Die Volumina einzelner Kontrakte bewegen sich im Bereich zwischen 100.000 bis zu mehreren Millionen Dollar. Das täglich gehandelte Gesamtvolumen wurde Mitte der 90er Jahre auf 1,3 Billionen Dollar geschätzt und wird heute



deutlich höher sein. Durch die Vernetzung des Marktes wird weltweit rund um die Uhr aktiv gehandelt, nur an Wochenenden und einigen Feiertagen ruht der Devisenhandel.

Betrachtet man die täglichen Kursentwicklungen, wie sie in den Tageszeitungen oft abgedruckt werden, so erscheinen sie auf den ersten Blick vollkommen regellos. Der Erfolg eines Devisenhändlers hängt von seiner Fähigkeit ab, Tendenzen der Kursänderungen vorherzusagen bzw. die damit verbundenen Risiken abzuschätzen. Geht man vom heutigen Kurs aus, so stellt sich die Frage, wie sich dieser in den nächsten Zeitabständen verändert. Je nach Situation und Anlagestrategien liegen diese Abstände in unterschiedlichen Bereichen, wobei Zeitabstände im Sekundenbereich prinzipiell möglich sind. In den letzten Jahren wurde verschiedentlich die Frage aufgeworfen, ob hinter den Kursschwankungen Regelmäßigkeiten verborgen sind. Das Erkennen von Regelmäßigkeiten ist der erste Schritt, um neue Strategien für Geldanlagen zu entwickeln, wobei es nicht nur darum geht, aus Kursentwicklungen Gewinne zu erzielen. Insbesondere bei Banken steht oft das Ziel im Vordergrund, die Risiken, die in diesen Kursschwankungen stecken, zu erfassen und zu minimieren bzw. abzusichern.

Risiken in Kursentwicklungen werden typischerweise durch die Differenz (Inkrement) oder durch den Quotienten (return) der Kurswerte  $x(t)$  und  $x(t+\tau)$  zu den Zeitpunkten  $t$  und dem späteren Zeitpunkt  $t+\tau$  untersucht. Betrachtet man auch hier die Statistiken, d.h. die Auftrittshäufigkeiten dieser Fluktuationsgrößen, wie sie in Abbildung 3 (linke Teilfigur) zu sehen sind, so ergibt sich wie für die Windgeschwindigkeitsfluktuation eine anomale Statistik. Es war ein erstaunliches Ergebnis, zu erkennen, dass die Statistiken der Turbulenz und der Devisendaten sich so sehr ähnlich sind. Dies wird noch deutlicher, wenn man die Entwicklung der Statistiken für unterschiedliche Abstände (in der Zeit für die Finanzdaten und im Raum für die Turbulenz) betrachtet, wie sie in Abbildung 3 im linken und rechten Teilbild zu sehen ist. In beiden Fällen erkennt man, dass die Statistiken mit kleiner werdenden Abständen immer anomaler, d.h. intermittenter werden. Als Ursache für diesen Sachverhalt konnten wir ein kaskadenartiges Systemverhalten nachweisen. Fluktuationen auf großen Abständen stehen hier in einer bestimmten Wechselwirkung mit den Fluktuationen auf kleinen Skalen.

## Kaskadenmodelle

Für die Turbulenz ist das Bild einer Kaskade schon seit mehreren Jahrzehnten in Diskussion. Im Rahmen dieses Modells stellt man sich die Turbulenz so vor, dass

durch äußeren Antrieb auf großen Skalen große Wirbel entstehen, die instabil sind und in kleinere Wirbel zerfallen. Aber auch die kleineren Wirbel verhalten sich wie die großen Wirbel und erzeugen noch kleinere Wirbel. Wie die Puppe in der Puppe erzeugen hier diese Wirbel eine ganze Hierarchie von Wirbeln in unterschiedlichen Größen.

Für die Finanzdaten ergibt sich entsprechend ein hierarchisches Bild von Transaktionskaskaden. Die treibende Kraft auf großen Skalen sind große Aufträge wichtiger Kunden. Für den Devisenhandel hat zum Beispiel ein Großunternehmen eine große Menge von mehreren hundert Millionen Dollar gekauft. In der Regel behält ein solches Unternehmen dieses Geld nicht, sondern versucht aus Gründen der Risikominimierung einen großen Teil des Geldes an Händler weiterzuverkaufen. Die Händler verhalten sich ähnlich, was je nach Größe der Geldmenge zu unterschiedlich großen kaskadenartigen Transaktionsgeschäften führt.

Ein wichtiges Ergebnis unserer Forschung ist, dass wir diese hierarchischen kaskadenartigen Prozesse anhand der vorliegenden Daten nachweisen können und dass wir zusätzlich die mathematischen Prozessgleichungen aus den Daten rekonstruieren können. In Abbildung 3 sind neben den empirischen Statistiken, die sich aus vorliegenden Daten ergeben und mit einzelnen Symbolen dargestellt sind, die Statistiken mit durchgezogenen Kurven dargestellt, die sich aus den von uns rekonstruierten Prozessgleichungen ergeben. Mit diesen von uns entwickelten neuen Analyseverfahren lassen sich eine Vielzahl von Fragen der Komplexitätsforschung für die Turbulenz, das Finanzmarktgeschehen und auch andere komplexe Systeme neu und grundlegender beantworten.

Wir hoffen, dem Leser mit diesem Aufsatz eine Einführung in die Fragestellungen der Turbulenz- und Finanzdatenforschung gegeben zu haben. Insbesondere haben wir versucht, einige spannende und relevante Aspekte von anomalen Statistiken darzustellen. Unserer Erkenntnis nach sind gerade hierarchische bzw. kaskadenartige Prozesse in komplexen Systemen für die Ausbildung dieser anomalen Statistiken verantwortlich. Je größer die Skalenbereiche der Kaskaden sind, um so stärker werden sich die intermittenten Statistiken ausbilden können. Aus diesem Ansatz heraus könnte man vermuten, dass die zurzeit auf Grund von Globalisierungstendenzen stattfindende, politisch immer weniger eingeschränkte weltweite Vernetzung von Märkten einen Einfluss auf

die Statistiken unserer Gesellschaft hat.

## Die Autoren



Prof. Dr. Joachim Peinke studierte Physik in Tübingen und Corvallis (Oregon, USA). Für seine Diplomarbeit (1985) wurde er mit dem Dr.-Friedrich-Förster-Preis ausgezeichnet. 1988 promovierte er in Tübingen, 1992 folgte dort

die Habilitation. Von 1990 bis 1994 war Peinke wiss. Mitarbeiter und Heisenberg-Stipendiat am Centre National de la Recherche Scientifique in Grenoble, anschließend Privatdozent an der Universität Bayreuth, bevor er 1998 an die Universität Oldenburg berufen wurde. Der Wissenschaftler ist Leiter der Arbeitsgruppe Hydrodynamik und Windenergie im Institut für Physik und Mitbegründer des Zentrums für Windenergieforschung „ForWind“ der Universitäten Oldenburg und Hannover. Sein Forschungsschwerpunkt ist die Komplexitätsforschung in strömungsphysikalischen Systemen, wie Turbulenz oder Windenergie, mit Anwendungen in anderen Gebieten.



Prof. Dr. Rudolf Friedrich studierte Physik in Stuttgart, wo er auch promovierte und sich habilitierte. Seit 2001 ist er Direktor des Instituts für Theoretische Physik der Westfälischen Wilhelms

Universität Münster. Friedrichs Forschungsschwerpunkt ist die Turbulenzforschung und Strukturbildung.



Dipl. Phys. Malte Siefert studierte Physik in Oldenburg. Für seine Diplomarbeit erhielt er im Jahr 2000 den Weser-Ems-Wissenschaftspreis der Oldenburgischen Landesbank. Seit 2001 arbeitet er als wiss. Mitarbeiter der Arbeitsgruppe Hydrodynamik und Windenergie an dem Problem der statistischen Beschreibung turbulenter Strömungen.



Dipl. Phys. Frank Böttcher ist seit Abschluss seines Physikstudiums an der Universität Oldenburg im Jahr 2001 Doktorand in der Arbeitsgruppe Hydrodynamik und Windenergie. Er befasst sich mit der Analyse kleinskaliger atmosphärischer Turbulenz und Windböen.